3. Sistemas de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Se define un **sistema de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de primer orden y dimensión** n como un conjunto de n ecuaciones de la forma

$$\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t), \\ x_2'(t) & = & a_{21}(t)x_1(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t), \\ \cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n'(t) & = & a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t), \end{array} \tag{1}$$

donde $a_{ij}(t)$ y $b_i(t)$, para todos i, j, $1 \leq i, j \leq n$, son funciones reales continuas definidas sobre un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Cuando las funciones $a_{ij}(t)$ son constantes, esto es, $a_{ij}(t) = a_{ij}$, se dice que el sistema es de **coeficientes constantes**.

Si introducimos la función matricial

$$A(t) = \left(a_{i,j}(t)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

y las funciones vectoriales

$$B(t) = \left(b_1(t), \ldots, b_n(t)\right)^T,$$
$$X(t) = \left(x_1(t), \ldots, x_n(t)\right)^T,$$

donde T indica el vector traspuesto, entonces el sistema (1) se puede escribir como una ecuación diferencial lineal de la forma

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t), \tag{2}$$

donde $X'(t)$ es la función vectorial cuyas componentes son las derivadas de las componentes de $X(t)$. Llamaremos a $A(t)$ **matriz de coeficientes** del sistema y $B(t)$ **término independiente**. Si $B(t) \equiv \mathbf{0}$, es decir, $B(t)$ es el vector nulo para cada $t \in I$, entonces se dice que el sistema es **homogéneo**. En caso contrario se dice que es **no homogéneo** o **completo**.

Una **solución** del sistema (1) es un conjunto de n funciones $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}$, son derivables con continuidad en I y satisfacen las n ecuaciones del sistema (1) para todo $t \in I$. Equivalentemente una solución de la ecuación lineal (2) es una función vectorial $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}^n$, diferenciable con continuidad en I y que satisface la ecuación (2) para todo $t \in I$.

Cuando la dimensión del sistema sea dos usaremos $x(t)$ e $y(t)$ para designar las componentes de la función incógnita $X(t)$, esto es, notaremos $X(t) = (x(t), y(t))^T$ y cuando la dimensión sea tres notaremos $X(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$.

4. Problema de Cauchy: Existencia y unicidad de soluciones

Un **problema de valores iniciales** o **problema de Cauchy** consiste en lo siguiente: Se dan $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}(n, \mathbb{R}))$ y $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ y se da un punto $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Se trata

de hallar, si es posible, algún intervalo $J \subset I$ tal que $J \ni t_0$ y alguna función $X : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $X \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$, tal que satisfaga

$$(P) \left\{ \begin{array}{rcl} X'(t) & = & A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) & = & X_0 \end{array} \right.$$

para todo t en el intervalo J, entorno del punto t_0.

Teorema 4.1. *Dado un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, sean $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}(n, \mathbb{R}))$ y $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$. Entonces, fijado $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ el problema (P) tiene solución única definida en I.*

5. Estructura del conjunto de soluciones

Vamos a ver que el conjunto de todas las soluciones de un sistema diferencial homogéneo de dimensión n,

$$X'(t) = A(t)X(t), \tag{H}$$

con $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}(n, \mathbb{R}))$, que denotamos por $\mathcal{S}_H$, tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n y que el conjunto de soluciones del sistema completo

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t), \tag{C}$$

con A como antes y $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$, que denotamos por $\mathcal{S}$, tiene estructura de espacio afín sobre el espacio vectorial de las soluciones del sistema homogéneo asociado.

Las siguientes propiedades de las ecuaciones homogénea (H) y completa (C) son de comprobación inmediata con sólo tener en cuenta la propiedad de linealidad de la derivada.

Propiedades 5.1. **(i)** *Si X y $\widetilde{X}$ son dos soluciones de la ecuación (H) entonces $c_1 X + c_2 \widetilde{X}$ también es solución de la ecuación (H), donde c_1 y c_2 son dos números reales arbitrarios. En consecuencia, $\mathcal{S}_H$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.*

(ii) *Si X y $\widetilde{X}$ son dos soluciones de la ecuación completa (C) entonces $X - \widetilde{X}$ es una solución de la ecuación homogénea (H).*

(iii) *Si X es solución de la ecuación (H) y $\widetilde{X}$ es una solución de (C) entonces $X + \widetilde{X}$ es una solución de (C).*

Proposición 5.2. *Bajo las hipótesis iniciales, se verifica que $\mathcal{S}_H$ es un espacio vectorial de dimensión n. En consecuencia, si $X_1, \ldots, X_n$ forman una base de $\mathcal{S}_H$, entonces toda solución de $X'(t) = A(t)X(t)$ en I se puede expresar de la forma*

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \cdots + c_n X_n(t),$$

para ciertas constantes $c_1, \ldots, c_n$ reales.

$\triangleright$Demostración: Ya se ha observado que $\mathcal{S}_H$ tiene estructura de espacio vectorial. Veamos qué dimensión tiene este espacio. Fijamos un $t_0 \in I$. Definimos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{S}_H & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ & X & \rightsquigarrow & X(t_0) \end{array}$$

Se tiene que Ψ es, trivialmente, lineal. Además, Ψ es sobreyectiva pues para todo $X_0 \in I\!R^n$, por el Teorema de Existencia y Unicidad existe una solución de $X'(t) = A(t)X(t)$ tal que $X(t_0) = X_0$ y es inyectiva ya que si X y $\widetilde{X} \in \mathcal{S}_H$ son tales que $\Psi(X) = \Psi(\widetilde{X})$ entonces $X(t_0) = \widetilde{X}(t_0)$ y, por la uniciad de soluciones, se concluye que $X \equiv \widetilde{X}$. Así, Ψ es un isomorfismo y, por tanto, se concluye que

$$\dim(\mathcal{S}_H) = \dim(I\!R^n) = n.$$

Proposición 5.3. *Si $X_p(t)$ es una solución particular de $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$, entonces cualquier otra solución de la ecuación completa se puede expresar de la forma*

$$X(t) = X_p(t) + X_H(t),$$

siendo $X_H(t)$ una solución de la ecuación homogénea asociada. Esto es, se tiene $\mathcal{S} = X_p(t) + \mathcal{S}_H$ y, en consecuencia, $\mathcal{S}$ es un espacio afín sobre el espacio vectorial S_H.

$\triangleright$Demostración: Por **(iii)** de Propiedades 5.1 sabemos que toda solución que se expresa de la forma $X_p(t) + X_H(t)$ es solución de la ecuación completa. Sea ahora $X(t)$ cualquier otra solución de la ecuación completa. Ésta se puede escribir como

$$X(t) = X_p(t) + (X(t) - X_p(t)),$$

donde $X(t) - X_p(t)$ verifica la ecuación homogénea puesto que es la diferencia de dos soluciones de la ecuación completa. Finalmente poniendo $X_H(t) = X(t) - X_p(t)$ se concluye la demostración de esta proposición.$\triangleleft$

6. Soluciones del sistema homogéneo

6.1. Dependencia e independencia de funciones

Se dice que k funciones vectoriales $X_1, X_2, \ldots, X_k$ definidas sobre un intervalo I son **linealmente dependientes** en I si existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$, no todas nulas, tales que

$$c_1X_1(t) + c_2X_2(t) + \cdots + c_kX_k(t) = \mathbf{0}, \qquad \forall t \in I$$

y en caso contrario se dice que $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son **linealmente independientes** en I, esto es, si

$$c_1X_1(t) + c_2X_2(t) + \cdots + c_kX_k(t) = \mathbf{0}, \qquad \forall t \in I \Longrightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Obsérvese que, en particular, cuando se tienen sólo dos funciones, X_1 y X_2, éstas son linealmente dependientes en I si, y sólo si, existe una constante c tal que $X_1(t) = cX_2(t)$ para todo $t \in I$.

6.2. Wronskiano

El **wronskiano** de n funciones vectoriales $X_1, X_2, \ldots, X_n$, siendo las n componentes de $X_i = (x_{1i}(t), x_{2i}(t), \ldots, x_{ni}(t))^T$ para cada i, $1 \le i \le n$, se define como el

determinante $n \times n$

$$W[X_1, \ldots, X_n](t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

También usaremos para el wronskiano la notación $W[X_1, \ldots, X_n]$ ó $W(t)$ según queramos destacar las funciones que intervienen en el determinante o el hecho de que éste es una función de valor real.

Teorema 6.1. *Dadas n funciones vectoriales $X_1, X_2, \ldots, X_n$ definidas sobre un intervalo abierto I, se tiene que*

(a) *Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son linealmente dependientes en I entonces*

$$W[X_1, \ldots, X_n](t) = 0 \qquad \forall\, t \in I.$$

(b) *Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son soluciones en I de un mismo sistema homogéneo de dimensión n, $X'(t) = A(t)X(t)$, con $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}(n, \mathbb{R}))$. Entonces $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son linealmente independientes en I si y sólo si*

$$W[X_1, \ldots, X_n](t) \neq 0 \qquad \forall\, t \in I.$$

$\triangleright$Demostración: **(a)** Supongamos que existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todas nulas tales que

$$c_1X_1(t) + c_2X_2(t) + \cdots + c_nX_n(t) = \mathbf{0} \qquad \forall\, t \in I.$$

Consideramos el siguiente sistema, para cada $t \in I$,

$$\begin{array}{rcl} c_1x_{11}(t) + c_2x_{12}(t) + \cdots + c_nx_{1n}(t) & = & 0, \\ c_1x_{21}(t) + c_2x_{22}(t) + \cdots + c_nx_{2n}(t) & = & 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & . & . \\ c_1x_{n1}(t) + c_2x_{n2}(t) + \cdots + c_nx_{nn}(t) & = & 0. \end{array}$$

Se sabe que un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas tiene una solución no trivial si, y sólamente si, el determinante de sus coeficientes se anula. Puesto que aquí las incógnitas son $c_1, \ldots, c_n$ y el determinante de coeficientes es el wronskiano de $X_1, \ldots, X_n$ en t, se sigue que $W(t) = 0$ para todo $t \in I$.

(b) La condición $W[X_1, \ldots, X_n](t) \neq 0$ para todo $t \in I$ es suficiente para concluir la independencia lineal de $X_1, \ldots, X_n$, por el apartado anterior. Probemos que la condición es necesaria. Supongamos que $W(t_0) = 0$ para algún $t_0 \in I$ y vamos a probar que esto implica que las soluciones $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son linealmente dependientes. Consideramos el sistema de n ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{array}{rcl} c_1x_{11}(t_0) + c_2x_{12}(t_0) + \cdots + c_nx_{1n}(t_0) & = & 0, \\ c_1x_{21}(t_0) + c_2x_{22}(t_0) + \cdots + c_nx_{2n}(t_0) & = & 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & . & . \\ c_1x_{n1}(t_0) + c_2x_{n2}(t_0) + \cdots + c_nx_{nn}(t_0) & = & 0 \end{array}$$

en las incógnitas $c_1, c_2, \ldots, c_n$. El determinante de coeficientes de este sistema es $W(t_0)$ y puesto que $W(t_0) = 0$ existe una solución no trivial. Esto es, existen números $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos nulos, tales que se cumple la identidad

$$c_1 X_1(t_0) + c_2 X_2(t_0) + \cdots + c_n X_n(t_0) = \mathbf{0}.$$

Consideramos entonces la función vectorial $c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \cdots + c_n X_n(t)$ definida en I que evidentemente es solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) \\ X(t_0) = \mathbf{0} \end{cases}$$

Además, la solución trivial $X \equiv \mathbf{0}$ también es solución de este problema de Cauchy, entonces, por la unicidad de solución que nos garantiza el Teorema 4.1 puesto que partimos de la hipótesis de que $A(t)$ es continua en I, se tiene que

$$c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \cdots + c_n X_n(t) = \mathbf{0} \qquad \forall t \in I,$$

lo que contradice la hipótesis de independencia lineal. Por lo tanto, $W(t) \neq 0$ para todo $t \in I$ como queriamos probar.$\triangleleft$

Observación: Del teorema anterior se sigue que si el wronskiano de n soluciones se anula en un punto entonces se anula en todo punto.

Teorema 6.2. (de Jacobi) *Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son soluciones del sistema $X'(t) = A(t)X(t)$ en un intervalo abierto I en el que $A(t)$ es continua, entonces*

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} trA(s)ds}$$

para cierto valor $t_0 \in I$, siendo trA la traza de la matriz A, esto es, $trA(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \cdots + a_{nn}(t)$.

$\triangleright$Demostración: Teniendo en cuenta que la derivada de un determinante $n \times n$ es la suma de los n determinantes obtenidos al derivar por separado las filas del determinante original, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W(t) &= \begin{vmatrix} x'_{11}(t) & x'_{12}(t) & \cdots & x'_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x'_{n1}(t) & x'_{n2}(t) & \cdots & x'_{nn}(t) \end{vmatrix} \\ &:= W_1(t) + \cdots + W_n(t) \end{aligned}$$

Como para cada i, $1 \leq i \leq n$, X_i es solución de $X'(t) = A(t)X(t)$ entonces

$$\begin{pmatrix} x'_{i1}(t) \\ \vdots \\ x'_{in}(t) \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x_{i1}(t) \\ \vdots \\ x_{in}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_{i1}(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_{in}(t) \end{pmatrix}$$

Sustituyendo estas expresiones en $W_i(t)$ nos queda

$$W_i(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{i-11}(t) & x_{i-12}(t) & \cdots & x_{i-1n}(t) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_{j1}(t) & \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_{j2}(t) & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_{jn}(t) \\ x_{i+11}(t) & x_{i+12}(t) & \cdots & x_{i+1n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

Por propiedades de los determinantes vemos que

$$W_i(t) = a_{ii}(t)W(t)$$

Por lo tanto la expresión para $W'(t)$ se reduce a

$$W'(t) = (a_{11}(t) + a_{22}(t) + \cdots + a_{nn}(t))W(t) = tr A(t)W(t)$$

Finalmente, resolviendo esta ecuación de variables separables obtenemos la fórmula de Jacobi.$\triangleleft$

6.3. Matriz Fundamental

LLamaremos **matriz fundamental** del sistema $X'(t) = A(t)X(t)$ a aquella matriz cuyas columnas son una base del espacio $\mathcal{S}_H$ de soluciones de dicho sistema.

6.3.1. Solución general del sistema homogéneo

Proposición 6.3. *Sea Φ una matriz fundamental del sistema $X'(t) = A(t)X(t)$ en un intervalo I. Entonces, la solución general del sistema homogéneo en I se puede expresar en la forma*

$$X(t) = \Phi(t)C,$$

donde $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$ es un vector constante arbitrario.

7. Soluciones del sistema completo

Sea la ecuación vectorial completa $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$, entonces, si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental de la ecuación homogénea asociada y $X_p(t)$ es una solución particular de la completa, la solución general de la ecuación completa será de la forma

$$X(t) = X_p + \Phi(t)C,$$

donde $C = (c_1, \ldots, c_n)^T$ es un vector de constantes arbitrarias.

Teorema 7.1. (Método de variación de constantes) *Sea Φ una matriz fundamental de $X' = A(t)X$ entonces*

(a) *Existe una solución particular del sistema completo* $X' = A(t)X + B(t)$ *que es de la forma* $X_p(t) = \Phi(t)C(t)$ *donde* $C(t)$ *satisface* $\Phi(t)C'(t) = B(t)$*. Explícitamente,*

$$X_p(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)B(t)dt$$

(b) *La solución general del sistema completo es de la forma*

$$X(t) = \Phi(t)C + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)B(t)dt,$$

con $C = (c_1, \dots, c_n)^T$ *un vector constante arbitrario.*

▷Demostración: **(a)** Ensayamos una solución particular del sistema completo de la forma

$$X_p(t) = \Phi(t)C(t),$$

donde $C(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))^T$.

Sustituyendo ésta en la ecuación matricial dada nos queda

$$(\Phi(t)C(t))' = A(t)(\Phi(t)C(t)) + B(t).$$

Aplicando la regla de derivación para el producto de función matricial por función vectorial en el lado izquierdo de esta ecuación obtenemos

$$\Phi'(t)C(t) + \Phi(t)C'(t) = A(t)(\Phi(t)C(t)) + B(t). \qquad (*)$$

Por ser Φ matriz fundamental de $X' = A(t)X$ se verifica $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ y, atendiendo a la propiedad asociativa del producto de matrices, podemos reemplazar en $(*)$ el producto $A(t)\Phi(t)C(t)$ por $\Phi'(t)C(t)$ con lo que, simplificando, resulta

$$\Phi(t)C'(t) = B(t).$$

Puesto que $\Phi(t)$ es inversible esto implica que

$$C'(t) = \Phi^{-1}(t)B(t).$$

En consecuencia, integrando se obtiene

$$C(t) = \int \Phi^{-1}(t)B(t)dt,$$

de donde, substituyendo en X_p, resulta

$$X_p(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)B(t)dt.$$

(b) Es una consecuencia inmediata del apartado anterior y del hecho de que todas las soluciones del sistema completo se escriben como la suma de la solución general del sistema homogéneo asociado y una solución particular del sistema completo.

Observación En particular, la solución al problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X'(t) & = & A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) & = & X_0 \end{array} \right.$$

con $(t_0, X_0) \in I \times I\!R^n$ se expresa de la forma

$$X(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)X_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)B(s)ds.$$

A continuación damos una propiedad de las ecuaciones completas muy útil para resolverlas cuya demostración se puede hacer sin dificultad.

Propiedades 7.2. (Principio de superposición) *Para cada i, $1 \leq i \leq q$, sea X_{p_i} una solución particular de la ecuación completa $X'(t) = A(t)X(t) + B_i(t)$, con $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}(n, I\!R))$ y $B_i \in \mathcal{C}^0(I, I\!R^n)$. Entonces $\sum_{i=1}^{q} X_{p_i}$ es una solución particular de la ecuación completa*

$$X'(t) = A(t)X(t) + \sum_{i=1}^{q} B_i(t).$$

8. Sistemas lineales con coeficientes constantes

La ecuación diferencial con coeficientes constantes $X'(t) = A\,X(t)$ con $A \in \mathcal{M}(n, I\!R)$, tiene una matriz fundamental de la forma $\Phi(t) = e^{At}$. Se verifica que $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$, luego e^{At} es una matriz fundamental ya que sus columnas son soluciones linealmente independientes del sistema $X'(t) = A\,X(t)$. Además, $\widetilde{\Phi}(t) = e^{At}Q$ donde Q es una matriz inversible también es una matriz fundamental.

Proposición 8.1. *Sean $A \in \mathcal{M}(n, I\!R)$ y $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{C}^n$ vectores linealmente independientes, entonces las funciones vectoriales $e^{At}\mathbf{v}_1, \ldots, e^{At}\mathbf{v}_k$ son linealmente independientes en $I\!R$.*

$\triangleright$Demostración: Supongamos que

$$\alpha_1 e^{At}\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k e^{At}\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

entonces

$$e^{At}(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{n_1}\mathbf{v}_k) = \mathbf{0},$$

y puesto que e^{At} es inversible para todo $t \in I\!R$ y $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ son linealmente independientes, se sigue que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.$\triangleleft$

Definición 8.2. Si λ es un autovalor de A, se llama **vector propio (autovector) generalizado** de A asociado a λ a todo vector $\mathbf{v} \in \mathbb{C}$ no nulo tal que $\mathbf{v} \in \ker(A - \lambda I)^k$ para algún $k \in I\!N$.

Para cada autovalor λ de A de multiplicidad m vamos a construir m soluciones del sistema linealmente independientes. Veamos cómo se haría esto.

Si $\dim(\ker(A - \lambda I)) = n_1$ entonces elegimos $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n_1} \in Ker(A - \lambda I)$ que sean linealmente independientes y consideramos las funciones vectoriales

$$e^{At}\mathbf{v}_1, \ldots, e^{At}\mathbf{v}_{n_1}.$$

Cada una de estas funciones es solución del sistema pues es el producto de una matriz fundamental, e^{At}, por un vector de constantes. Ahora bien, para hallar la función vectorial $e^{At}\mathbf{v}_j$, con $1 \leq j \leq n_1$, no es necesario calcular la matriz exponencial e^{At} puesto que

$$e^{At}\mathbf{v}_j = e^{\lambda t}e^{(A-\lambda I)t}\mathbf{v}_i = e^{\lambda t}\mathbf{v}_j$$

ya que $\mathbf{v}_j \in \ker(A-\lambda I)$ y, por tanto $(A-\lambda I)^k = \mathbf{v}_j = 0$ para todo $k \geq 1$.

Si $n_1 = m_i$ ya habríamos terminado el proceso para el autovalor λ.

En el caso en que $n_1 < m$ entonces hallamos el espacio $\ker(A-\lambda I)^2$. Si $\dim(\ker(A-\lambda I)^2) = n_2$ entonces elegimos $n_2 - n_1$ vectores de este espacio que sean linealmente independientes y que no pertenezcan al $\ker(A-\lambda I)$ para asegurar que sean linealmente independientes con $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n_1}$ elegidos anteriormente. Sean éstos $\mathbf{v}_{n_1+1}, \ldots, \mathbf{v}_{n_2}$, entonces consideramos las funciones vectoriales

$$e^{At}\mathbf{v}_{n_1+1}, \ldots, e^{At}\mathbf{v}_{n_2}$$

que, del mismo modo que antes, son soluciones del sistema.

Además, estas funciones se pueden hallar sin necesidad de calcular e^{At} pues para cada $j,\ \ n_1+1 \leq j \leq n_2$, se cumple que

$$e^{At}\mathbf{v}_j = e^{\lambda t}e^{(A-\lambda I)t}\mathbf{v}_j = e^{\lambda_i t}(I + (A-\lambda_i I)t)\mathbf{v}_j$$

dado que como $\mathbf{v}_j \in \ker(A-\lambda I)^2$ se verifica que $(A-\lambda I)^k\mathbf{v}_j = \mathbf{0}$ para $k = 2, 3, \ldots$

Si $n_2 = m$ se habría terminado el proceso para λ. Pero si $n_2 < m$ se halla el $\ker(A-\lambda I)^3$ y se procede de forma análoga a la descrita hasta ahora, y así sucesivamente hasta llegar a un $\ker(A-\lambda)^s$ cuya dimensión sea $n_s = m$ (la multiplicidad de λ_i). Elegimos $n_s - n_{s-1}$ vectores $\mathbf{v}_j,\ j = n_{s-1}+1, \ldots, n_s$ de este espacio que sean linealmente independientes y que no pertenezcan al $\ker(A-\lambda I)^{s-1}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} e^{At}\mathbf{v}_j &= e^{\lambda t}e^{(A-\lambda I)t}\mathbf{v}_j \\ &= e^{\lambda t}(I + (A-\lambda I)t + \frac{t^2}{2!}(A-\lambda I)^2 + \frac{t^3}{3!}(A-\lambda I)^3 + \cdots + \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}(A-\lambda I)^{s-1})\mathbf{v}_j \end{aligned}$$

Por tanto, habremos obtenido las m soluciones del sistema asociadas al autovalor λ:

$$e^{At}\mathbf{v}_1, \ldots, e^{At}\mathbf{v}_m.$$

Supongamos que A tiene $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ autovalores con multiplicidades $m_1, \ldots, m_k$ respectivamente (observemos que $m_1 + \ldots + m_k = n$). Siguiendo el procedimiento anterior para cada λ_i, $1 \leq i \leq k$, obtenemos las n soluciones

$$\{e^{At}\mathbf{v}_1^1, \ldots, e^{At}\mathbf{v}_{m_1}^1, \ldots, e^{At}\mathbf{v}_1^k, \ldots, e^{At}\mathbf{v}_{m_k}^k\}. \tag{3}$$

y la matriz fundamental $\Phi(t)$ cuyas columnas son dichas funciones, es decir,

$$\Phi(t) = e^{At}(\mathbf{v}_1^1, \ldots, \mathbf{v}_{m_1}^1, \ldots, \mathbf{v}_1^k, \ldots, \mathbf{v}_{m_k}^k)$$

Observación: La matriz exponencial e^{At}, que es una matriz fundamental, se puede obtener a través de $\Phi(t)$ ya que

$$e^{At} = \Phi(t)(\mathbf{v}_1^1, \ldots, \mathbf{v}_{m_1}^1, \ldots, \mathbf{v}_1^k, \ldots, \mathbf{v}_{m_k}^k)^{-1}.$$

Matriz Fundamental mediante la Forma de Jordan

Teorema 8.3. (Forma Canónica de Jordan) *Sea $A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{C})$, se verifica que existe una matriz P inversible (no singular), que llamaremos matriz de paso, tal que*

$$A = PJ_AP^{-1}$$

donde J_A es de la forma

$$J_A = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_r \end{pmatrix}$$

y para cada $i = 1, \dots, r$ la caja J_i es de la forma

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

siendo λ_i un autovalor de A.

La matriz J_A se denomina forma canónica de Jordan de A y, salvo permutaciones de los bloque J_i, está unívocamente determinada.

Aplicando este teorema y las propiedades de la matriz exponencial se tiene que

$$e^{At} = e^{PJ_AP^{-1}} = Pe^{J_A}P^{-1},$$

luego, se trata de hallar e^{J_A}. Es fácil comprobar que

$$J_A^k = \begin{pmatrix} J_1^k & & & 0 \\ & J_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_r^k \end{pmatrix}$$

entonces

$$e^{J_At} = \begin{pmatrix} e^{J_1t} & & & 0 \\ & e^{J_2t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{J_rt} \end{pmatrix}$$

y el problema se reduce a hallar e^{J_it}. Podemos escribir

$$J_i = \lambda_i \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = \lambda_i I_{n_i} + N_i$$

y entonces, teniendo en cuenta las propiedades de la matriz exponencial,

$$e^{J_i t} = e^{(\lambda_i I_{n_i} + N_i)t} = e^{\lambda_i t} e^{N_i t}. \tag{4}$$

Ahora bien, como

$$N_i^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad N_i^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}, \cdots$$

$$\cdots \ N_i^{n_i-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad N_i^{n_i} = N_i^{n_i+1} = \cdots = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

entonces, sustituyendo estas matrices en (4), se tiene que

$$\begin{aligned} e^{J_i t} &= e^{\lambda_i t}\left(I_{n_i} + \frac{t}{1!}N_i + \frac{t^2}{2!}N_i^2 + \cdots + \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!}N_i^3 + \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}N_i^{n_i-1}\right) \\ &= e^{\lambda_i t}\begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ & 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} \\ & & & & 1 & \frac{t}{1!} \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad (*) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$e^{At} = P\begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & & 0 \\ & e^{J_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{J_r t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

donde para cada $i,\ 1 \le i \le r,\ e^{J_i t}$ viene dado por $(*)$.

Observación: Multiplicando por la matriz P a la derecha de esta última expresión se tiene que $e^{At}P = Pe^{J_A}$ y ésta es también una matriz fundamental.

Si A es una matriz diagonalizable entonces los cálculos de la matriz fundamental se simplifican mucho dado que $A = PDP^{-1}$ donde D es una matriz diagonal en cuya diagonal principal aparecen los autovalores de A y P es una matriz inversible. Por tanto, Pe^{Dt} es

una matriz fundamental y se comprueba fácilmente que

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

siendo $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ los autovalores de A.